●作戦会議

現代制御の問題。ブロック行列（区分行列）・子行列の関係が出てくるので，ややひねった問題。

(1)現代制御の 1 問目は大体こんな問題。

(2)(1)で求めたマイナーループの関係を子行列として，システム全体の状態空間表現すなわちブロック行列を求める。1 種の現代制御にしてはやや応用問題。どう書いたらわかりやすいのか難しい。

(3)特性多項式を求める。現代制御の 3 問目は大体こんな問題。

(4)伝達関数は以下の定義式から求めてもよい。

$$G(s) = \mathbb{c}(s\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1}\mathbb{b}$$

●解答

(1)図 2 の関係から，

$$\begin{cases} X_1(s) = \dfrac{1}{s+3} X_2(s) \to sX_1(s) = -3X_1(s) + X_2(s) \\ X_2(s) = \dfrac{1}{s+2} U(s) \to sX_2(s) = -2X_2(s) + U(s) \\ Y(s) = X_1(s) \end{cases}$$

逆ラプラス変換すると，

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -3x_1(t) + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -2x_2(t) + u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

これらを状態空間表現すると，

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x_1}(t) \\ \dot{x_2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\therefore \mathbb{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \mathbb{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbb{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \cdot\cdot\cdot(\text{答})$$

(2)題意より，

$$\dot{z}(t) = -\mathbb{c}\mathbb{x}(t) + r(t)$$

さらに題意の式から，

$$\dot{\mathbb{x}}(t) = \mathbb{A}\mathbb{x}(t) + \mathbb{b}u(t) = \mathbb{A}\mathbb{x}(t) + \mathbb{b}[-\mathbb{f}\mathbb{x}(t) + kz(t)] = (\mathbb{A} - \mathbb{b}\mathbb{f})\mathbb{x}(t) + k\mathbb{b}z(t)$$

$$\therefore \dot{\bar{\mathbb{x}}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbb{A} - \mathbb{b}\mathbb{f} & k\mathbb{b} \\ -\mathbb{c} & 0 \end{bmatrix} \bar{\mathbb{x}}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

さらに，$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$であるから，

$$\bar{\mathbb{A}} = \begin{bmatrix} \mathbb{A} - \mathbb{b}\mathbb{f} & k\mathbb{b} \\ -\mathbb{c} & 0 \end{bmatrix}, \ \bar{\mathbb{b}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbb{b} \end{bmatrix}, \bar{\mathbb{c}} = \begin{bmatrix} \mathbb{c} & 0 \end{bmatrix} \qquad \cdot\cdot\cdot(\text{答})$$

(3)　(2)より，

$$\bar{\mathbb{A}} = \begin{bmatrix} \mathbb{A} - \mathbb{b}\mathbb{f} & k\mathbb{b} \\ -\mathbb{c} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \quad 1) & 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ -(1 \quad 0) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

よって，行列$\bar{\mathbb{A}}$の固有値を与える特性多項式は，

$$|s\mathbb{I} - \bar{\mathbb{A}}| = \begin{vmatrix} s+3 & -1 & 0 \\ 1 & s+3 & -1 \\ 1 & 0 & s \end{vmatrix} = \{\mathrm{s}(\mathrm{s}+3)^2 + 1 + 0\} - \{0 + 0 - s\}$$

$$= s^3 + 6s^2 + 10s + 1 \qquad \cdot\cdot\cdot(\text{答})$$

(4)図 1 より，マイナーループから順に計算して，伝達関数$\dfrac{R(s)}{Y(s)}$を求める。

$$\frac{\dfrac{1}{s+2}}{1+\dfrac{1}{s+2}\times 1}=\frac{1}{s+3}$$

$$\frac{\dfrac{1}{s+3}\times\dfrac{1}{s+3}}{1+\dfrac{1}{s+3}\times\dfrac{1}{s+3}\times 1}=\frac{1}{s^2+6s+10}$$

$$\therefore \frac{R(s)}{Y(s)}=\frac{\dfrac{1}{s}\times\dfrac{1}{s^2+6s+10}}{1+\dfrac{1}{s}\times\dfrac{1}{s^2+6s+10}\times 1}=\frac{1}{s^3+6s^2+10s+1}$$ ・・・(答)