●作戦会議

　この問題が解ければ，電験 1 種の現代制御は大丈夫というような良問。非常にオーソドックスな流れの問題であり，難易度は低いが計算量が多めのタイプ。

(1)まず，状態空間表現で表すのが 1 種 2 次試験の鉄板。この後は安定性や，可制御性などを調べることになる。ちなみにこの問題では図 2 の時点でシステムは安定であり，ブロック(B)のフィードバックは根を特定の位置に配置するためのものなのだろう。安定性・可制御・可観測の求め方は覚えておく必要がある。

(2)本問のように，前半で求めたシステムにフィードバッグを追加して，目的の制御を行う流れの問題が頻出。特性多項式を求めて，最終的にシステムの特性方程式が目的の特性根（すべての根の実部が負なので安定）になるように制御しようとしている。

(3)伝達関数を求める方法は，ブロック図の変形と現代制御の公式との 2 通りがある。以下の式が現代制御における伝達関数の計算式である。必須ではないが，余裕があれば覚えておきたい。

$$\mathbb{c}^T[s\mathbb{I}-\mathbb{A}]^{-1}\mathbb{b}$$

(4)ラウス表から安定限界を求めればよい。ちなみに図 1 のフィードバック制御全体の伝達関数を求める必要はない。小さいことだが，計算量が多いので無駄なことはしないようにしたい。

●解答

(1)図 2 より，

$$X_1(s)=\frac{1}{s}X_2(s)\rightarrow sX_1(s)=X_2(s)\rightarrow \dot{x}_1(t)=x_2(t)$$

$$X_2(s) = \frac{1}{s}\{-2 \times X_1(s) - 4 \times X_2(s) + 1 \times U(s)\} \rightarrow sX_2(s) = -2X_1(s) - 4 \times X_2(s) + U(s)$$

$$\rightarrow \dot{x}_2(t) = -2x_1(t) - 4x_2(t) + u(t)$$

$$Y(s) = 1 \times X_1(s) \rightarrow y(t) = x_1(t)$$

以上の結果から状態空間表現は次のようになる。

$$[\dot{x}_1(t) \quad \dot{x}_2(t)]^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} [x_1(t) \quad x_2(t)]^T + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \quad 0][x_1(t) \quad x_2(t)]^T$$

したがって,

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbb{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbb{c}^T = [1 \quad 0] \qquad ・・・(答)$$

次に，この制御対象が可制御，可観測であるかを検討する。

$$\det[\mathbb{b} \quad \mathbb{A}\mathbb{b}] = \det\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow \text{可制御} \qquad ・・・(答)$$

$$\det\begin{bmatrix} \mathbb{c}^T \\ \mathbb{c}^T\mathbb{A} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{可観測} \qquad ・・・(答)$$

(2)

$$\mathbb{A} - \mathbb{b}\mathbb{f}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}[f_1 \quad f_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 - f_1 & -4 - f_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 - f_1 & -4 - f_2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \det[s\mathbb{I} - (\mathbb{A} - \mathbb{b}\mathbb{f}^T)] = \det\begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 + f_1 & s + 4 + f_2 \end{bmatrix} = s^2 + 4s + f_2 s - (-2 - f_1)$$

$$= s^2 + (4 + f_2)s + 2 + f_1 \qquad ・・・(答)$$

特性根が$-5 \pm j10$のときの特性方程式は,

$$(s + 5 + j10)(s + 5 - j10) = 0$$

$$s^2 + 10s + 125 = 0$$

上式と係数を比較すると，

$$\begin{cases} 2 + f_1 = 125 \\ 4 + f_2 = 10 \end{cases} \to \begin{cases} f_1 = 123 \\ f_2 = 6 \end{cases} \qquad \cdot\cdot\cdot(\text{答})$$

(3)題意の式より，

$$G_f(s) = \mathbb{c}^T[s\mathbb{I} - (\mathbb{A} - \mathbb{b}\mathbb{f}^T)]^{-1}\mathbb{b} = [1 \quad 0]\begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 + f_1 & s + 4 + f_2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= [1 \quad 0]\begin{bmatrix} s & -1 \\ 125 & s + 10 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 + 10s + 125}[1 \quad 0]\begin{bmatrix} s + 10 & 1 \\ -125 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{s^2 + 10s + 125}[s + 10 \quad 1]\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 + 10s + 125} \qquad \cdot\cdot\cdot(\text{答})$$

(4)制御系全体の特性方程式は，

$$1 + \frac{1}{s} \times K \times \frac{1}{s^2 + 10s + 125} = 0$$

$$s^3 + 10s^2 + 125s + K = 0$$

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 125 \\ s^2 & 10 & K \\ s^1 & \dfrac{1250 - K}{10} & \\ s^0 & K & \end{array}$$

ラウス表より，安定限界では

$1250 - K = 0, \qquad K = 0$

$\therefore K = 1250 \ (\because K > 0)$

この結果を特性方程式に代入すると，

$$s^3 + 10s^2 + 125s + 1250 = 0$$

$$s^2(s + 10) + 125(s + 10) = 0$$

$$(s + 10)(s^2 + 125) = 0$$

$$\therefore s = -10, \pm j5\sqrt{5}$$

これが安定限界における三つの閉ループ極である。 ・・・(答)